

**Barem clasa a XI-a**  
**(OLM 2015-etapa locală)**

**Of. 10 p**

**Subiectul I. (20 puncte)**

Se arată că dacă  $a + b + c = \pi$  atunci  $tga + tgb + tgc = tga \cdot tgb \cdot tgc$ .

**(5 p)**

Folosind proprietățile determinanților, avem

$$\begin{vmatrix} tga & tgc - 1 & tgb + 1 \\ tgc + tgb & tga - 1 & 1 \\ tga \cdot tgb \cdot tgc & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3} \begin{vmatrix} 1 & tgc - 1 & tgb + 1 \\ tga - 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_2 - l_1, l_3 - l_1} \begin{vmatrix} 1 & tgc - 1 & tgb + 1 \\ 0 & tga - tgc & -tgb \\ 0 & -tgc & -tgb \end{vmatrix} = tga \cdot tgb \cdot tgc \begin{vmatrix} tga - tgc & -tgb \\ -tgc & -tgb \end{vmatrix}$$

$$= -tg^2 a \cdot tg^2 b \cdot tgc \leq 0$$

**(15 p)**

**Subiectul II. (20 puncte)**

$$A^{2015} \cdot B = O_n \Rightarrow A^{2015} \cdot B^{2015} = (AB)^{2015} = O_n \quad \text{(10 p)}$$

$$(I_n - AB) \left( I_n + AB + (AB)^2 + \dots + (AB)^{2014} \right) = I_n - (AB)^{2015} = I_n. \quad \text{Deci } I_n - AB \text{ este inversabilă.} \quad \text{(10 p)}$$

**Subiectul III. (40 puncte)**

a) Utilizăm criteriul Cesaro-Stolz, pt.  $a_n = \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} + \dots + \frac{1}{n+2104}$  și  $b_n = \ln(n+2015)$ ,  $b_n \rightarrow \infty$ , crescător. (\*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+2015}}{\ln \left( \frac{n+2016}{n+2015} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{n+2015} \right)^{n+2015}} = \frac{1}{\ln \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n+2015} \right)^{n+2015} \right] \right)} = \frac{1}{\ln e} = 1 \quad (* *)$$

$$\text{Din } (*), (**) \xRightarrow{C.C.-S.} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \text{(20 p)}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + n} \quad \text{(10 p)} \quad b_n = 2n^2 + n \quad \text{(5 p)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n)^{b_n} = e \quad \text{(5 p)}$$

**Subiectul IV. (10 puncte)**

Din relația de recurență rezultă că  $x_n > 0$ , pentru orice  $n \geq 1$ . **(2 p)**

$$\text{Putem scrie: } |x_{n+1} - 4| = \left| (\sqrt{x_n + 45} - 7) - (\sqrt{x_n + 5} - 3) \right| \leq \left| \sqrt{x_n + 45} - 7 \right| + \left| \sqrt{x_n + 5} - 3 \right| =$$

$$= \frac{|x_n - 4|}{\sqrt{x_n + 45} + 7} + \frac{|x_n - 4|}{\sqrt{x_n + 5} + 3} = |x_n - 4| \left( \frac{1}{\sqrt{x_n + 45} + 7} + \frac{1}{\sqrt{x_n + 5} + 3} \right) \leq |x_n - 4| \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{21} |x_n - 4| \quad \text{(5 p)}$$

$$\text{Folosind inegalitatea obținută, avem succesiv: } |x_{n+1} - 4| \leq \frac{10}{21} |x_n - 4| \leq \left( \frac{10}{21} \right)^2 |x_{n-1} - 4| \leq \dots \leq \left( \frac{10}{21} \right)^{n+1} |x_0 - 4| \quad \text{(2 p)}$$

$$\text{Folosind criteriul majorării, din } |x_n - 4| \leq \left( \frac{10}{21} \right)^n |x_0 - 4|, \text{ obținem } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4. \quad \text{(1 p)}$$